### МОДУЛЬ 1: Множества, отношения, алгебры

#### Вопросы для подготовки к рубежному контролю

1. Множества, подмножества. Способы определения множеств. Равенство множеств. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение). Методы доказательства теоретико-множественных тождеств.
2. Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, кортеж. Декартово произведение множеств.
3. Отображения: область определения, область значений. Инъективное, сюръективное и биективное отображения. Частичное отображение.
4. Соответствия. График и граф соответствия, область определения, область значения. Сечение соответствия. Сечение соответствия по множеству. Функциональность соответствия по компоненте. Бинарные и n-арные отношения. Связь между отношениями, соответствиями и отображениями.
5. Композиция соответствий, обратное соответствие и их свойства (с доказательством).
6. Специальные свойства бинарных отношений на множестве (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).
7. Классификация бинарных отношений на множестве: эквивалентность, толерантность, порядок, предпорядок, строгий порядок.
8. Отношение эквивалентности. Класс эквивалентности. Фактор-множество.
9. Отношения предпорядка и порядка. Наибольший, максимальные, наименьший и минимальные элементы. Точная нижняя и верхняя грани множества.
10. Точная верхняя грань последовательности. Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с доказательством). Пример вычисления неподвижной точки.
11. Операции на множестве. Понятие алгебраической структуры. Свойства операций (ассоциативность, коммутативность, идемпотентность). Нуль и нейтральный элемент (единица) относительно операции. Примеры. Универсальная алгебра, носитель, сигнатура. Примеры. Однотипные алгебры.
12. Группоиды, полугруппы, моноиды. Единственность нейтрального элемента. Обратный элемент. Группа. Единственность обратного элемента в группе.
13. Циклическая полугруппа (группа). Образующий элемент. Примеры конечных и бесконечных циклических полугрупп и групп. Порядок конечной группы. Порядок элемента. Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы.
14. Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Коммутативное кольцо. Кольца вычетов. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности вычитания относительно умножения).
15. Тела и поля. Примеры полей. Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством). Поля вычетов. Решение систем линейных уравнений в поле вычетов.
16. Подполугруппа, подмоноид, подгруппа. Примеры. Циклические подгруппы. Подкольца и подполя.
17. Смежные классы подгруппы по элементу. Теорема Лагранжа. Изоморфизм групп. Примеры.
18. Полукольцо. Идемпотентное полукольцо. Естественный порядок идемпотентного полукольца.
19. Замкнутое полукольцо. Итерация элемента. Примеры вычисления итерации в различных замкнутых полукольцах.
20. Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
21. Квадратные матрицы порядка *n* над идемпотентным полукольцом. Теорема о полукольце квадратных матриц. Замкнутость полукольца квадратных матриц над замкнутым полукольцо. Решение систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах.

#### Типовые задачи рубежного контроля

1. Доказать тождество .
2. Доказать тождество .
3. Доказать тождество .
4. Доказать, что для любой функции *f* и любых множеств *A* и *B* имеют место соотношения: а) ; б) .
5. Построить график и граф бинарного отношения , заданного на множестве , если .
6. Для бинарного отношения  на множестве  построить графики отношений  и .
7. Для бинарного отношения  на множестве найти , , , , , .
8. Пусть бинарное отношение  определено на множестве положительных рациональных чисел следующим образом: , если . Показать, что  является отношением порядка.
9. Ассоциативна ли операция  на множестве *M*, если , .
10. Решить уравнение  в группе , если , , .
11. Решить уравнение  в группе , где .
12. Найти в  решение системы уравнений



1. Доказать, что если в кольце оба произведения и обратимы, то оба элемента  и  обратимы. Что изменится в результате, если сохранить обратимость только одного произведения?